

Zentrale Aufnahmeprüfung 2018 für die Kurzgymnasien des Kantons Zürich

Mathematik

Lösungen

Punkteverteilung:

Nr.:	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4	5a	5b	6a	6b	7a	7b	8	9	10a	10b	11a	11b	11c	Total
Alg:	2	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2							1	1	2	28
Gm:												3	2	2	3	2	2				14
P _{max} :	2	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	1	1	2	42

Insgesamt: 42 Punkte

Aufgabe 1a**x = 11****2 P.***Lösungsweg:*

$$-10 - 3(4x - 8) = 2(18 - 7x)$$

$$-10 - 12x + 24 = 36 - 14x$$

$$14 - 12x = 36 - 14x$$

$$2x = 22$$

$$x = 11$$

Aufgabe 1b**x = 34****2 P.***Lösungsweg:*

$$\frac{2x+4}{8} - \frac{x-4}{6} = 4$$

$$6x + 12 - 4x + 16 = 96$$

$$2x + 28 = 96$$

$$2x = 68$$

$$x = 34$$

Aufgabe 2a**12, 28, -2, -6****2 P.***Lösung:*

x	y	x - 4y	x ² - 2(y - x)
4	-2	12	28
-2	3	-14	-6

Aufgabe 2b **$\frac{15x}{2} = 7.5x$** **2 P.***Lösungsweg:*

$$\frac{12xy^2}{5y} : \frac{4y}{15} - \frac{2y}{3} \cdot \frac{9x}{4y} = \frac{12xy}{5} \cdot \frac{15}{4y} - \frac{1}{1} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3x}{1} \cdot \frac{3}{1} - \frac{3x}{2} = 9x - \frac{3x}{2} = \frac{18x}{2} - \frac{3x}{2} = \frac{15x}{2} = 7.5x$$

oder

$$\frac{12xy^2}{5y} : \frac{4y}{15} - \frac{2y}{3} \cdot \frac{9x}{4y} = \frac{180xy^2}{20y^2} - \frac{18xy}{12y} = \frac{540xy^2}{60y^2} - \frac{90xy^2}{60y^2} = \frac{450xy^2}{60y^2} = \frac{15x}{2} = 7.5x$$

Aufgabe 3a**220****2 P.***Lösungsweg:*

$$40\% \hat{=} 360 \text{ Frauen (bis 40 Jahre)}$$

$$100\% \hat{=} 900 \text{ teilnehmende Frauen}$$

$$45\% \hat{=} 900 \text{ teilnehmende Frauen}$$

$$100\% \hat{=} 2000 \text{ teilnehmende Personen}$$

$$55\% \hat{=} 1100 \text{ teilnehmende Männer}$$

$$100\% \hat{=} 1100 \text{ teilnehmende Männer}$$

$$20\% \hat{=} 220 \text{ Männer (bis 40 Jahre)}$$

oder

x: Anzahl teilnehmende Personen

$$0.45 \cdot 0.4 \cdot x = 360$$

$$x = 2000$$

$$0.2 \cdot 0.55 \cdot 2000 = 220 \text{ teilnehmende Männer (bis 40 Jahre)}$$

Aufgabe 3b**71%****2 P.***Lösungsweg:*

$$0.6 \cdot 0.45 + 0.8 \cdot 0.55 = 0.71 = 71\%$$

oder

$$900 - 360 = 540 \text{ Frauen (älter als 40 Jahre)}$$

$$1100 - 220 = 880 \text{ Männer (älter als 40 Jahre)}$$

$$540 + 880 = 1420 \text{ Personen (älter als 40 Jahre)}$$

$$1420 : 2000 = 0.71 = 71\%$$

Aufgabe 4**Mia: 29 GB, Nora: 145 GB (GB: Gummibärchen)****4 P.***Lösungsweg 1:*

	Anzahl Gummibärchen	
	«vorher»	«nachher»
Nora	$5x$	$5x - 30 - 7 = 5x - 37$
Mia	x	$x + 7$

$$3 \cdot (x + 7) = 5x - 30 - 7$$

$$3x + 21 = 5x - 37$$

$$2x = 58$$

$$x = 29$$

Mia hatte zu Beginn 29 Gummibärchen, Nora hatte 145 Gummibärchen.

oder

Lösungsweg 2:

	Anzahl Gummibärchen	
	«vorher»	«nachher»
Nora	$5x$	$3 \cdot (x + 7)$
Mia	x	$x + 7$

$$5x - 30 - 7 = 3 \cdot (x + 7)$$

$$5x - 37 = 3x + 21$$

$$2x = 58$$

$$x = 29$$

Mia hatte zu Beginn 29 Gummibärchen, Nora hatte 145 Gummibärchen.

oder

Lösungsweg 3:

	Anzahl Gummibärchen	
	«vorher»	«nachher»
Nora	x	$x - 30 - 7 = x - 37$
Mia	$\frac{1}{5}x$	$\frac{1}{5}x + 7$

$$3 \cdot \left(\frac{1}{5}x + 7 \right) = x - 30 - 7$$

$$\frac{3}{5}x + 21 = x - 37$$

$$\frac{2}{5}x = 58$$

$$x = 145$$

Mia hatte zu Beginn 29 Gummibärchen, Nora hatte 145 Gummibärchen.

oder

Lösungsweg 4:

	Anzahl Gummibärchen	
	«vorher»	«nachher»
Nora	$3x + 30 + 7$	$3x$
Mia	$x - 7$	x

$$5 \cdot (x - 7) = 3x + 30 + 7$$

$$5x - 35 = 3x + 37$$

$$2x = 72$$

$$x = 36$$

Mia hatte zu Beginn 29 Gummibärchen, Nora hatte 145 Gummibärchen.

oder

Lösungsweg 5:

	Anzahl Gummibärchen	
	«vorher»	«nachher»
Nora	$x + 30 + 7$	x
Mia	$\frac{1}{3}x - 7$	$\frac{1}{3}x$

$$5 \cdot \left(\frac{1}{3}x - 7 \right) = x + 30 + 7$$

$$\frac{5}{3}x - 35 = x + 37$$

$$\frac{2}{3}x = 72$$

$$x = 108$$

Mia hatte zu Beginn 29 Gummibärchen, Nora hatte 145 Gummibärchen.

Aufgabe 5a

252, 504, 756 und 1008

2 P.

Lösungsweg:

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$14 = 2 \cdot 7$$

$$\text{kgV}(4, 9, 14) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 252$$

Lösungen: 252, 504, 756, 1008

Aufgabe 5b**27, 54, 135 und 270****2 P.***Lösungsweg:*

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$270 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

x muss ein Vielfaches von 27 sein. x muss genau 3-mal den Primfaktor 3 enthalten.
 x darf die Primfaktoren 2 und 5 höchstens je 1-mal enthalten.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{27}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{54}$$

$$5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{135}$$

$$2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{270}$$

Für x kommen die Zahlen 27, 54, 135 und 270 infrage.

Aufgabe 6a

$$\frac{1}{3} = 0.\bar{3} = 33.\bar{3}\%$$

2 P.*Lösungsweg:*

1. Zug

		r	r	r	w	w	g
2. Zug	r				X	X	
	r				X	X	
	r				X	X	
	w	X	X	X			
	w	X	X	X			
	g						

$$P(1x \text{ weiss}, 1x \text{ rot}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

oder

$$P(1x \text{ weiss}, 1x \text{ rot}) = P(wr) + P(rw) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = 2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 6b**2000-mal****2 P.***Lösungsweg:*

		1. Zug					
		r	r	r	w	w	g
2. Zug	r	X	X	X			
	r	X	X	X			
	r	X	X	X			
	w						
	w						
	g						

$$P(2x \text{ rot}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

oder

$$P(2x \text{ rot}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = 25\% \hat{=} 493$$

$$1 = 100\% \hat{=} 1972$$

→ Die beste Schätzung ist 2000.

Aufgabe 7a

$$b = 10, h_b = 3$$

3 P.*Lösung:*

$$\begin{aligned}
 b &= \sqrt{6^2 + 8^2} \\
 &= \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

Direkte Berechnung von h_b :

$$\begin{aligned}
 \overline{BC} \cdot h_a &= b \cdot h_b \\
 5 \cdot 6 &= 10 \cdot h_b \\
 h_b &= 3
 \end{aligned}$$

Berechnung von h_b mit Hilfe des Flächeninhalts des Dreiecks ABC:

$$\begin{aligned}
 A_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h_a \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 A_{\Delta ABC} &= A_{\text{Rechteck}} - A_{\text{Dreieck 1}} - A_{\text{Dreieck 2}} \\
 &= 6 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 48 - 9 - 24 = 15
 \end{aligned}$$

oder

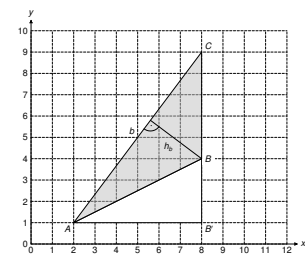
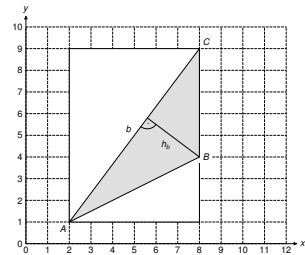
$$\begin{aligned}
 A_{\Delta ABC} &= A_{\Delta \text{gross}} - A_{\Delta \text{klein}} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 24 - 9 = 15
 \end{aligned}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

$$15 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h_b$$

$$15 = 5 \cdot h_b$$

$$h_b = 3$$



Aufgabe 7b**D(2|15)****2 P.**

Lösung:

$$A_{\text{Trapez}} = 57 = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \cdot h$$

$$57 = \frac{\overline{AD} + 5}{2} \cdot 6$$

$$19 = \overline{AD} + 5$$

$$\overline{AD} = 14$$

oder

$$A_{\text{Trapez}} = 57 = m \cdot h$$

$$57 = m \cdot 6$$

$$m = 9.5$$

$$\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} = 9.5$$

$$\frac{\overline{AD} + 5}{2} = 9.5$$

$$\overline{AD} = 14$$

oder

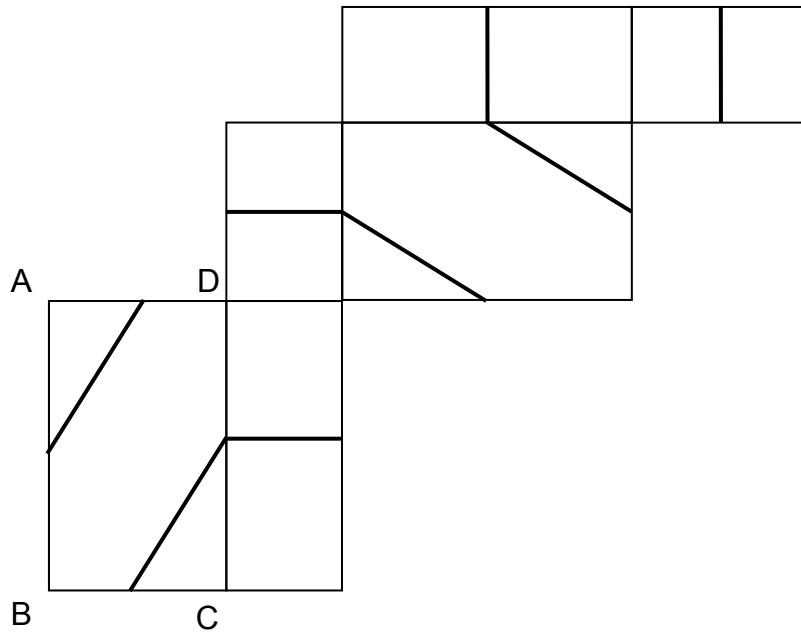
$$A_{\text{Trapez}} - A_{\Delta ABC} = 57 - 15 = 42$$

$$A_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot h$$

$$42 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot 6$$

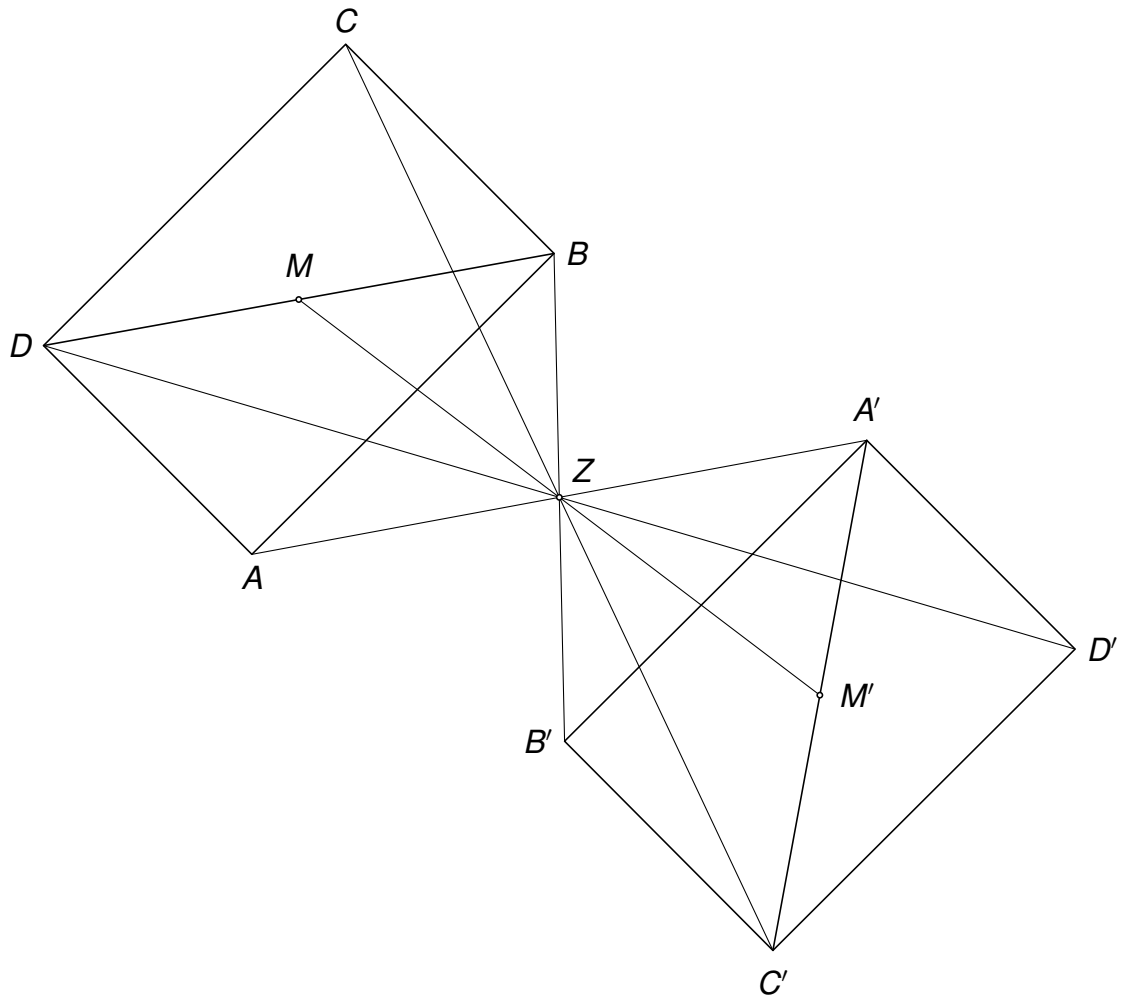
$$\overline{AD} = 14$$

Der Punkt D hat die Koordinaten $D(2|15)$.

Aufgabe 8**s. Abbildung****2 P.***Lösung:*

Aufgabe 9**3 P.**

Lösung:



Aufgabe 10a

$$60 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} \approx 84.85 \text{ cm}$$

2 P.*Lösung:*

s: Länge einer Oktaederkante

$$s = 5 \cdot \sqrt{2} \approx 7.07 \text{ cm}$$

$$l_{\text{Draht}} = 12 \cdot s = 12 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 60 \cdot \sqrt{2} \approx 12 \cdot 7.07 \approx 84.85 \text{ cm}$$

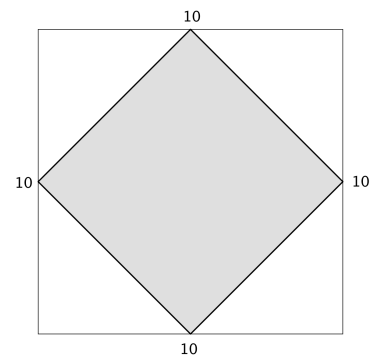
Aufgabe 10b

$$166 \frac{2}{3} \text{ cm}^3 = 166.\bar{6} \text{ cm}^3$$

2 P.*Lösung:*

$$\begin{aligned} G_{\text{Pyramide}} &= \frac{1}{2} \cdot G_{\text{Würfel}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10^2 = 50 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{Oktaeder}} &= 2 \cdot V_{\text{Pyramide}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 5 \\ &= \frac{500}{3} \text{ cm}^3 = 166 \frac{2}{3} \text{ cm}^3 = 166.\bar{6} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



oder

s: Länge einer Oktaederkante

$$s = 5 \cdot \sqrt{2} \approx 7.07 \text{ cm}$$

$$h_{\text{Pyramide}} = 5 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{Oktaeder}} &= 2 \cdot V_{\text{Pyramide}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 7.07^2 \cdot 5 \\ &= \frac{500}{3} \text{ cm}^3 = 166 \frac{2}{3} \text{ cm}^3 = 166.\bar{6} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

oder

a : Länge einer Würfelkante

$$G_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{2} \cdot G_{\text{Würfel}}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot G_{\text{Würfel}} \cdot h \quad | G_{\text{Würfel}} = a^2$$

$$= \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{12} \cdot a^3$$

$$V_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot V_{\text{Pyramide}}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot a^3 = \frac{1}{6} \cdot a^3 = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Würfel}}$$

$$V_{\text{Oktaeder}} = \frac{1}{6} \cdot 10^3 = 166.\bar{6} \text{ cm}^3$$

Aufgabe 11a

2048

1 P.

Lösungsweg:

$$2^{11} = 2048$$

Aufgabe 11b

2^{n-1}

1 P.

Lösungsweg:

$$2^{n-1}$$

Aufgabe 11c

39. Figur

2 P.

Lösungsweg:

$$2^{38} \approx 2.749 \cdot 10^{11} > 2.5 \cdot 10^{11} = 250 \text{ Milliarden}$$

$$2^{n-1} = 2^{38}$$

$$n - 1 = 38$$

$$n = 39$$

⇒ Die 39. Figur.